

2021학년도 김지석 모의고사 문제지

수학 영역 (가 형)

제0회S

성명		수험 번호						—				
----	--	-------	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

매 순간 성장하는 시간이길

- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

김지석수학연구실

5지선다형

1. $4 \times 27^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+x)}{\log_4(1+x)}$ 의 값은? [2점]

- ① $\log_2 3$ ② $2\log_3 2$ ③ $\log_4 5$
④ $2\log_5 2$ ⑤ $\log_4 3$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 2^{n+2} + 1}{2^n}$ 의 값은? [2점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

4. $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^3$ 의 전개식에서 $\frac{1}{x^3}$ 의 계수는? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

5. $\sum_{k=1}^9 (k+2)^2 - \sum_{k=1}^{10} (k-2)^2$ 의 값은? [3점]

- ① 284 ② 288 ③ 292 ④ 296 ⑤ 300

6. 사건 전체의 집합 S 의 두 사건 A 와 B 는 서로
배반사건이고,

$$A \cup B = S, P(A) = 3P(B)$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

7. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(5 - \frac{a_n}{3^n}\right) = 25$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n}{3^{n-1}}$ 의 값은? [3점]

- ① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

8. 확률변수 X 가 이항분포 $B(150, p)$ 를 따르고 X 의 평균이 50일 때, X 의 분산은? [3점]

- ① $\frac{50}{3}$ ② $\frac{100}{3}$ ③ 50 ④ $\frac{200}{3}$ ⑤ 100

9. 함수 $f(x)=9x^2+x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n}$ 의 값은?

[3점]

- ① 11 ② $\frac{23}{2}$ ③ 12 ④ $\frac{25}{2}$ ⑤ 13

10. 세 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 다섯 자리 자연수를 만들 때, 1과 3이 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는? [3점]

- ① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 200

11. $0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 방정식

$$2x^2 + (4\sin\theta)x + 3\cos\theta = 0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 θ 의 값의 범위는 $\alpha < \theta < \beta$ 이다. $\beta - \alpha$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

12. 어느 과수원에서 수확하는 수박의 무게는 평균이

m kg, 표준편차가 1kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 수확한 수박 중에서 25개를 임의 추출하여 얻은 표본평균을 이용하여, 이 과수원에서 수확하는 수박의 무게의 평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하면 $a \leq m \leq 8.516$ 이다. a 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 7.484 ② 7.584 ③ 7.684
④ 7.784 ⑤ 7.884

13. 두 함수 $y=3\sin \frac{\pi}{3}x$, $y=2\cos \frac{\pi}{4}x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 각각 $A(a,0)$, $B(b,0)$ ($0 < a < 4 < b < 8$)라 하자. 함수 $y=3\sin \frac{\pi}{3}x$ 의 그래프 위의 임의의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ $\frac{7}{2}$
- ④ $\frac{9}{2}$
- ⑤ $\frac{11}{2}$

14. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\rightarrow X$ 의 개수는? [4점]

- (가) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 2이다.
- (나) 함수 f 의 치역의 모든 원소의 합은 홀수이다.

- ① 180
- ② 182
- ③ 184
- ④ 186
- ⑤ 188

15. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n} (k-1)\{2^k + (-2)^k\} = \frac{6n-5}{9} \times 2^{2n+3} + \frac{40}{9} \dots\dots(*)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{2m} (k-1)\{2^k + (-2)^k\} = \frac{6m-5}{9} \times 2^{2m+3} + \frac{40}{9}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2(m+1)} (k-1)\{2^k + (-2)^k\} \\ &= \frac{6m-5}{9} \times 2^{2m+3} + \frac{40}{9} + \boxed{\text{(나)}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\boxed{\text{(다)}}}{9} \times 2^{2m+3} + \frac{40}{9}$$

$$= \frac{6(m+1)-5}{9} \times 2^{2(m+1)+3} + \frac{40}{9}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (*)가 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나), (다)에 알맞은 식을 각각

$f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $\frac{p \times g(4)}{f(2)}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

16. 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A, B, C가 다음

조건을 만족시킬 때, $(\overline{BC} + \overline{CA})^2$ 의 값은? [4점]

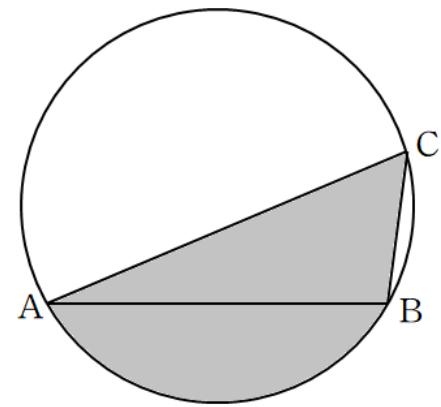
(가) 점 C를 포함하지 않는 호 AB의 길이는 $\frac{2\pi}{3}$ 이다.

(나) 점 C를 포함하지 않는 호 AB와 두 선분 BC,

CA로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{5}{12}\pi$ 이다.

① $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 5$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 6$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 5$

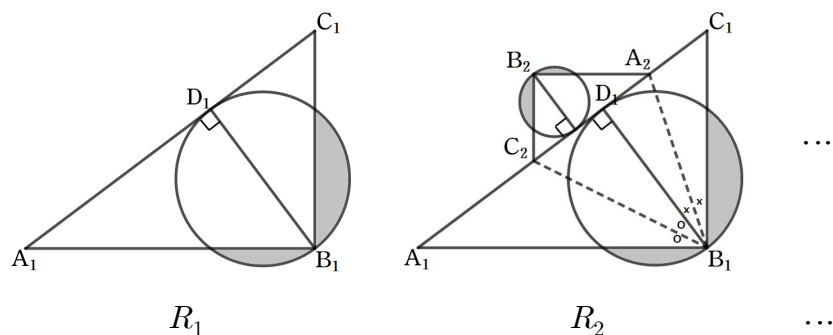
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 6$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + 5$



17. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=\frac{3}{2}$ 이고

$\angle A_1B_1C_1=90^\circ$ 인 직각삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다. 점 B_1 에서 선분 C_1A_1 에 내린 수선의 발을 D_1 이라 하고 선분 B_1D_1 을 지름으로 하는 원을 그리고, 이 원의 내부와 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에 각 $C_1B_1D_1$, $A_1B_1D_1$ 의 이등분선이 선분 A_1C_1 과 만나는 점을 각각 A_2 , C_2 라 하자. 선분 A_2C_2 를 빗변으로 하고 나머지 두 변이 선분 A_1B_1 또는 선분 B_1C_1 과 평행하도록 삼각형 $A_2B_2C_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 원을 그리고, 원의 내부와 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{14}\left(\pi - \frac{36}{25}\right)$ ② $\frac{3}{14}\left(\pi - \frac{36}{25}\right)$ ③ $\frac{5}{14}\left(\pi - \frac{36}{25}\right)$
 ④ $\frac{1}{14}\left(\pi - \frac{48}{25}\right)$ ⑤ $\frac{3}{14}\left(\pi - \frac{48}{25}\right)$

18. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되는 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x > 0$ 인 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다.
 (나) $f(1) = 2$

함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

- < 보 기 >
 ㉠. $g'(2) = \frac{1}{f'(1)}$
 ㉡. $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $2g(x)f'(g(x)) = x$ 이면 $f(4) = 4$ 이다.
 ㉢. $f(2) = 4$ 이고, $\int_2^4 \frac{1}{g(x)} dx = a$ 라 하면 $\int_1^2 \left\{ \frac{2f(t)}{t^2} - \frac{f'(t)}{t} \right\} dt = a$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

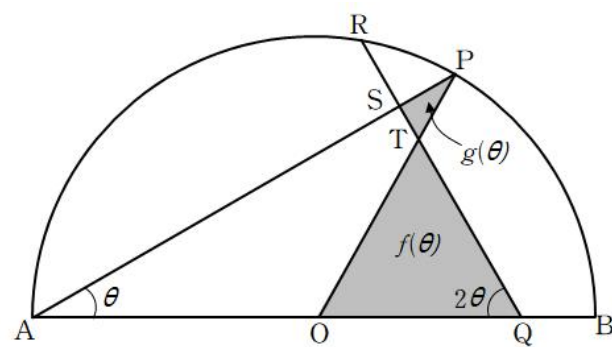
19. 한 개의 동전을 연속해서 던져 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 게임을 한다.

(가) 앞면이 나온 뒤 뒷면이 나오면 1점을 얻는다.
 (나) 뒷면이 나온 뒤 앞면이 나오면 2점을 얻는다.
 (다) 앞면 또는 뒷면이 연속해서 나오면 점수를 얻지 않는다.

동전을 5번 던지면서 위의 규칙에 따라 얻은 점수의 합이 3 이하일 때, 점수의 합이 홀수일 확률은? [4점]

- ① $\frac{7}{11}$ ② $\frac{15}{22}$ ③ $\frac{8}{11}$ ④ $\frac{17}{22}$ ⑤ $\frac{9}{11}$

20. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 선분 AB 위의 점 Q를 $\overline{AP} = \overline{AQ}$ 가 되도록 잡고, 호 AB 위의 점 R를 $2\angle PAB = \angle RQA$ 가 되도록 잡는다. 선분 QR이 두 선분 AP, OP와 만나는 점을 각각 S, T라 하자. $\angle PAB = \theta$ 일 때, 삼각형 OTQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PST의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

21. 음이 아닌 실수 t 에 대하여 $x=0$ 부터 $x=k$

$(k \geq 0)$ 까지 곡선 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 의 길이가 t 가 되도록 하는 k 의 값을 $f(t)$ 라 하고, 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ -f(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

$-m < x < m$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_{-x}^x \{|g(s) - a| - b\} ds = 0 \quad (a, b \text{는 양의 상수})$$

이 되도록 하는 양수 m 의 최댓값이 $\frac{3}{4}$ 이다.

- ① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

단답형

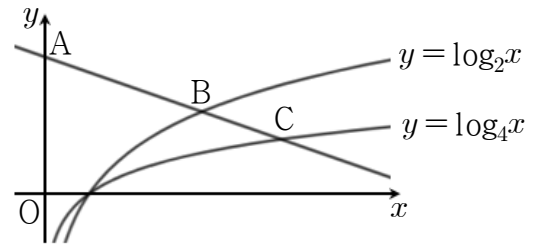
22. $\ln 2 \int_0^2 2^x dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{10} - a_7 = 18$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구하시오. [3점]

24. 함수 $f(x)=2e^{x^2+2x}$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값을 구하시오.

[3점]

26. 그림과 같이 점 $A(0, 3)$ 을 지나는 직선이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$ 와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C가 선분 AB를 3:1로 외분하는 점일 때, 두 점 B, C의 x 좌표의 곱을 구하시오. [4점]



25. 방정식 $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x - 12 = 0$ 의 두 근을 각각 α , β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 확률변수 X, Y 는 평균이 각각 $m, m+2$ 이고
표준편차가 모두 5인 정규분포를 따른다.

$$P(X \leq 2) - P(0 \leq Y \leq 4) = 0.0228$$

이 성립할 때, 표준정규분포표를 이용하여 m 의 값을
구하시오. [4점]

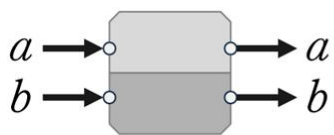
z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

28. 첫째항이 a 이고 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든
자연수 n 에 대하여

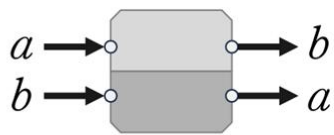
$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+2}{2} & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \\ \frac{a_n+3}{2} & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_m = a_{m+1}$ 을 만족시키는 자연수 m 의
최솟값이 6이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합을 구하시오.
[4점]

29. 그림은 왼쪽의 입력 신호 a, b 를 오른쪽으로 전달하여 신호를 출력하는 장치를 표현한 것이다. 장치는 [그림1]처럼 입력된 신호가 변하지 않은 채로 출력하기도 하고, [그림2]처럼 입력된 신호가 변하여 출력하기도 한다.



[그림1]



[그림2]

장치는 A, B 두 가지 종류가 있다. 장치 A 는 [그림1]과 같이 출력할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, [그림2]와 같이 출력할 확률도 마찬가지로 $\frac{1}{2}$ 이다. 장치 B 는 [그림1]과 같이 출력할 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, [그림2]와 같이 출력할 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다. 이런 A, B 두 종류의 장치 중 4개를 선택하여 일렬로 연결한다. 여기서 출력 결과가 변하지 않을 확률이 가장 높은 배열 상태에서, 출력 결과가 변하지 않을 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이며, 각 장치는 독립적으로 작동한다.) [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 < x < 0$ 에서 $f'(f(x)) = \frac{1}{4}(x+2)$ 이다.

(나) $0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ 이다.

1보다 큰 양수 a 에 대하여 구간 $[-1, 0]$ 에서

$f(x) = a - \frac{1}{x+2}$ 이다. 좌표평면의 제1사분면에서 곡선

$y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}\ln 2$ 가 오직 한 점에서만

만나도록 하는 a 의 최댓값이 $p+q\ln 6$ 일 때, $121(p+q)$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이고, $\ln 6$ 은 무리수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 감독관의 안내가 있을 때까지 표지를 넘기지 마시오.